

Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y  
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas



## TFM: Diseño de una unidad didáctica sobre grafos en 2º de Bachillerato.

Autor: Héctor Simó Bueno.

Tutor: Marina Murillo Arcila

# Índice

<b>Índice</b>	<b>2</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Marco teórico</b>	<b>4</b>
<b>2. Unidad didáctica: Introducción a la teoría de Grafos</b>	<b>5</b>
2.1 Objetivos didácticos	5
2.2 Competencias Básicas	5
2.3. Contenidos específicos	6
<b>3. Metodología</b>	<b>7</b>
3.1 Estrategias metodológicas	7
3.2 Recursos didácticos y materiales	7
<b>4. Proyecto</b>	<b>8</b>
4.1 Metodología del proyecto.	8
4.2 Enunciado del proyecto.	8
<b>5. Actividades.</b>	<b>13</b>
5.1 Temporalización de las actividades.	13
5.2 Desarrollo de las actividades.	14
Sesión 1	14
Sesión 2	22
Sesión 3	28
Sesión 4	35
<b>6. Evaluación</b>	<b>41</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>43</b>
<b>8. Fuentes de imágenes</b>	<b>43</b>

## Resumen

Los grafos son instrumentos para la representación de la información que nos ofrecen grandes posibilidades. Algunos ejemplos en los que se utilizan son redes sociales, modelización genética o redes de telecomunicaciones.

En el presente documento se desarrolla una unidad didáctica integrada en el bloque 2: “Números y álgebra” para el curso de 2º de bachillerato. La materia que se va a trabajar en dicha unidad son los grafos, una de las muchas aplicaciones de las matrices, proporcionando así al alumnado un conjunto de herramientas muy útiles para ordenar y analizar todo tipo de información, ya que una gran mayoría de problemas pueden resolverse utilizando grafos.

Se empleará una metodología didáctica de aprendizaje por proyectos junto con la metodología de la gamificación y se incluirán también clases teóricas en la que se darán ejemplos realistas con los que el alumnado pueda sentirse identificado y extrapolar a su vida diaria. Con esto se pretende que el alumnado que haya perdido el interés pueda recuperar la motivación por la asignatura.

# 1. Marco teórico

Los **grafos** son instrumentos para la representación de la información. Según Combariza (2003) “la teoría de grafos es una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas, comenzó en el siglo XVIII por una de las mentes más grandes que ha existido”. Esta disciplina tiene su inicio en la publicación del artículo *La solución de un problema referente a la geometría de posición* por Leonhard Euler en 1736, en el cual aparece la solución al problema de los puentes de Königsberg.

El empleo de los grafos en la **didáctica de la matemática** puede ser de una enorme utilidad a la hora de mejorar el **pensamiento matemático**. Como indica Coriat (1989) en su libro *Nudos y nexos: redes en la escuela* “la utilización y el estudio de los grafos es uno de los posibles instrumentos, aproximaciones o estrategias para conseguir (...) que los alumnos **aprendan a pensar**, a resolver problemas, a afrontar situaciones nuevas, a acceder a la información y a tratarla de forma adecuada” y “los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, extraer pautas y, de forma mucho más evidente, para llegar a entender esquemas y transferirlos a situaciones nuevas”.

La presente unidad didáctica pretende hacer uso de analogías, ejemplos y actividades que el alumnado pueda percibir como cercanas para aprender la teoría de grafos. Como bien apunta González, B. M. G. (2003). (2003); “**la analogía** (...) puede considerarse como un **recurso didáctico útil** para aplicar en los procesos de enseñanza-aprendizaje, que facilita la visualización de los conceptos teóricos abstractos, que facilita el recuerdo de la información y su **contextualización**, que favorece una disposición positiva hacia el aprendizaje, que permite construir el conocimiento y desarrollar el pensamiento creativo y, por tanto, que contribuye a que el alumnado tenga un aprendizaje significativo”. Además se va a utilizar una metodología de **aprendizaje basado en proyectos (APB)** que, debido al escaso número de sesiones de las que disponemos para realizar la unidad didáctica, consistirá en un proyecto sencillo pero divertido y que servirá para motivar al alumnado además de trabajar todas las competencias clave. Barrows (Barrows 1986) define el APB como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición de integración de los nuevos conocimientos”. En su artículo, Rudolf Tippelt y Hans Lindemann (2001), afirman que “el método de proyectos, a diferencia de los métodos de aprendizaje tradicionales, (...) reúne todos los requisitos necesarios, como instrumento didáctico, para el **desarrollo de competencias**”.

## 2. Unidad didáctica: Introducción a la teoría de Grafos

### 2.1 Objetivos didácticos

El objetivo de la presente unidad didáctica es el estudio de los grafos y se enmarca dentro del bloque 2 “Números y álgebra”. Los objetivos específicos de la unidad didáctica diseñada vienen descritos a continuación:

1. Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.
2. Desarrollar el pensamiento matemático.
3. Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, cómo y cuándo utilizarlos.
4. Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
5. Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.
6. Analizar las aplicaciones de los grafos.
7. Ser capaces de utilizar los diferentes algoritmos presentados para realizar operaciones con grafos.

### 2.2 Competencias Básicas

En el currículum de la educación secundaria obligatoria y bachillerato se considera que las competencias básicas que debe haber adquirido un alumno una vez finalizada dicha etapa son, tal y como son enumeradas y descritas en la [Orden ECD/65/2015, de 21 de enero](#), las siguientes:

COMPETENCIAS BÁSICAS
1. Comunicación lingüística (CCL)
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)
3. Competencia digital (CD)
4. Aprender a aprender (CAA)
5. Competencias sociales y cívicas (CSC)
6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)
7. Conciencia y expresiones culturales (CEC)

En la siguiente tabla se indica, para cada competencia básica que se va a trabajar en esta unidad didáctica, la relación entre las competencias y las actividades:

Competencias básicas	Actividades
Comunicación lingüística (CCL)	Actividad 1, Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5, Actividad 6, Actividad 7, Actividad 8, Actividad 9,
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)	Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5, Actividad 6, Actividad 7, Actividad 8, Actividad 9
Competencia digital (CD)	Actividad 2, Actividad 8
Aprender a aprender (CAA)	Actividad 1, Actividad 3, Actividad 5, Actividad 7, Actividad 8, Actividad 9
Competencias sociales y cívicas (CSC)	Actividad 1, Actividad 3, Actividad 5, Actividad 7, Actividad 9
Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)	Actividad 1
Conciencia y expresiones culturales (CEC)	Actividad 2, Actividad 4

### 2.3. Contenidos específicos

Los contenidos son según Sacristán, J. G. (1982) “los medios para conseguir una amplia gama de objetivos”. Es decir, señalan “qué” hay que enseñar y serán la base sobre la cual se desarrollarán las actividades. Los contenidos específicos a adquirir en la unidad didáctica propuesta son los siguientes:

- Historia, origen de la teoría de grafos.
- Tipos de grafos.
- Caminos y ciclos.
- Grafos eulerianos y algoritmo de Hierholzer.
- Ciclos hamiltonianos.
- Grafos ponderados.
- Algoritmo de Dijkstra.

### 3. Metodología

#### 3.1 Estrategias metodológicas

El núcleo de la unidad didáctica es un proyecto que ha sido específicamente diseñado para esta. El aprendizaje basado en proyectos (ABP) es, tal cual lo define Sánchez J. (2016), “un conjunto de tareas basadas en la resolución de problemas que culmina con un producto final”. Esta metodología, que busca que el alumnado adopte un rol principal en el proceso de enseñanza/aprendizaje, ha demostrado ser una herramienta muy útil en dicho proceso.

El proyecto anteriormente mencionado ha sido contextualizado utilizando la metodología de la gamificación. En el reino animal los cachorros utilizan el juego como una forma de aprender a sobrevivir, es por eso que es una actividad tan grabada en su genética. El juego es también una actividad inherente en la naturaleza humana y puede constituir una forma de aumentar la capacidad de aprendizaje del alumnado.

La unidad didáctica consta de 4 sesiones. En la primera sesión, como introducción, se presentará el enunciado del proyecto, se realizará una primera lectura rápida y se animará a los estudiantes a adoptar los roles que se indican. Además también se formarán los grupos para la realización del proyecto.

El desarrollo normal de las sesiones posteriores será el siguiente:

1. El profesor explicará, mediante una clase teórica los conceptos previstos para la sesión, estos conceptos están estrechamente relacionados con la actividad prevista para dicha sesión.
2. Se resolverán las dudas que hayan podido surgir durante la clase teórica o sobre conceptos de clases anteriores.
3. Se procederá a la realización en grupo de la actividad que forma parte de una de las cuatro fases del proyecto. Para la correcta realización de esta actividad habrá que volverse a leer la parte del enunciado del proyecto correspondiente.

#### 3.2 Recursos didácticos y materiales

Durante las sesiones se hará uso de los siguientes recursos y materiales:

1. Proyector.
2. Pizarra.
3. El documento presentado en el punto 4.2 Enunciado del proyecto: “la última esperanza”, el mapa planetario y el mapa de asteroides.
4. Material de dibujo.
5. Calculadora.

## 4. Proyecto

### 4.1 Metodología del proyecto.

El presente proyecto se desarrolla en grupos y consiste en la elaboración gradual de un conjunto de actividades que servirán para poner en práctica los conceptos y técnicas aprendidos en las clases teóricas. Para estas actividades se dedicará aproximadamente media hora de cada una de las cuatro sesiones que dura esta unidad didáctica, lo cual suma un total de dos horas. Cada una de las actividades consiste en un problema que debe resolverse poniendo en práctica los conceptos adquiridos en la primera parte de la sesión.

Para motivar al alumnado se ha contextualizado el proyecto mediante un juego en el que los estudiantes asumirán los roles de científicos que deben salvar a su civilización. Completar el juego implicaría que el alumnado ha adquirido todos los conceptos necesarios y se han cumplido todos los objetivos.

Este proyecto ha sido diseñado específicamente para la unidad didáctica y cuenta con una serie de objetivos, especificaciones técnicas y plazos que deben cumplirse. Para facilitar y simplificar la realización del proyecto, este ya viene planificado en el enunciado del mismo.

En la última sesión de la unidad didáctica se entregará un dossier que contendrá una solución a las 4 fases del proyecto junto con una justificación del porqué se han resuelto de esa forma. En el desarrollo de las actividades, se muestra la solución esperada por parte del alumnado a cada una de las cuestiones planteadas.

### 4.2 Enunciado del proyecto.

A continuación se presenta el enunciado del proyecto. Este se entregará a cada grupo de alumnos en la primera sesión y se compone de dos partes. La primera parte del proyecto servirá para contextualizar y crear el ambiente idóneo para el juego y en la segunda parte se detallan ciertas especificaciones técnicas que pretenden guiar al alumno a la hora de resolver las distintas cuestiones planteadas.

#### La última esperanza

##### Parte 1:

Elige un nombre para tu civilización: \_\_\_\_\_

Nuestro planeta acaba de recibir la inesperada visita de los Aiur, una de las civilizaciones alienígenas tecnológicamente más avanzadas del universo. Por suerte, no vienen a destruir, sino a ayudar.



Nos informan de que existe una fuerza alienígena que está conquistando el universo. Dentro de 5 años llegarán a nuestra galaxia y si no estamos preparados para entonces seremos aniquilados. La única forma de defenderse es colonizar el sistema planetario para obtener los recursos minerales de los planetas con los que fabricaremos armas que nos ayudarán a defendernos. Además, si la fuerza alienígena descubriese que nos preparamos para la guerra atacaría al instante.

Por suerte, los Aiur nos han ofrecido su ayuda: nos proporcionan acceso a sus avanzados conocimientos tecnológicos. Se han dividido dichos conocimientos en cuatro grupos. El inconveniente es que cada división necesitará un año de trabajo de todo el equipo para masterizar el conocimiento y aplicarlo.

Estas son, junto con su descripción, las tecnologías que han aceptado compartir con nosotros:

1. Mapa del sistema planetario. Se trata de un mapa que contiene la distribución de los planetas en el sistema.
2. Naves para el viaje espacial. Son las naves que utilizaremos para colonizar el sistema planetario. La tecnología Aiur para los viajes espaciales permite utilizar la gravedad de las órbitas planetarias para desplazarse. Estas naves viajan mucho más rápido cuando se desplazan dentro de las órbitas espaciales pero viajan a menor velocidad durante los trayectos entre órbitas.
3. Nave centinela. Es una nave capaz de detectar y destruir naves de la fuerza alienígena. El inconveniente es que los recursos para construir la nave son extremadamente escasos, así que sólo se podrá construir una nave centinela.
4. Nave mercante. Es una nave de gran tamaño que se utilizará para abastecer de alimentos a todos los planetas del sistema planetario.
5. Mapa de campos de asteroides y distancias espaciales. Este mapa se utilizará para obtener el tiempo que tardará la flota, una vez construida, en atravesar las rutas espaciales. Indica en unidades espaciales (U.E) las distancias a las que se encuentran los planetas del sol. Además muestra detalladamente donde hay campos de asteroides. Estos campos no afectan a las naves normales pero sí evitarán que la flota de guerra vaya a velocidad máxima.
6. Naves de combate. Son las naves que utilizaremos para defendernos. Su misión será viajar al planeta que va a ser atacado para defenderlo. Estas naves viajan a una velocidad de una U.E por hora. Sin embargo, cuando se desplazan dentro de una órbita su velocidad es de 10 U.E. Además por cuestiones estratégicas permanecerán siempre en flota y utilizarán las rutas espaciales ya establecidas.

El consejo planetario ha reunido los mejores científicos del planeta, vosotros, para afrontar la crisis. Sois **la última esperanza** de nuestra civilización. Debéis desarrollar un plan para evitar que la fuerza alienígena conquiste la galaxia, y finalmente vuestro planeta.

Después de discutir largo y tendido, el consejo ha decidido, con la orientación de los Aiur, las principales cuestiones que se han de resolver. Se han dividido en 4 fases y se han ordenado por orden de prioridad:

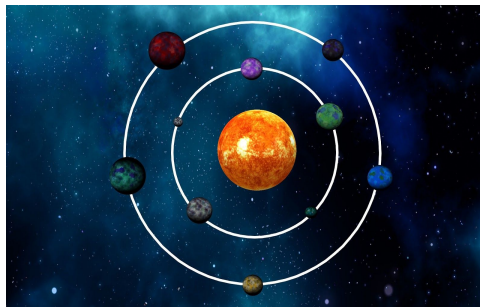
1. Colonizar el sistema planetario y establecer rutas de viaje espacial.

2. Establecer algún tipo de vigilancia en los planetas y en las rutas espaciales para evitar que pueda descubrirse la actual situación.
3.
  - a. Los planetas colonizados tendrán suficientes alimentos para sobrevivir al menos durante dos años, pero a partir de ese momento deberán abastecerse del planeta origen. Por lo tanto habrá que establecer una ruta óptima para el reparto de alimentos.
  - b. Deberá determinarse el planeta en el que se establecerá la base de la flota de guerra. Además habrá que calcular el tiempo que tardará la flota al viajar entre planetas.
4. Serán necesarias naves de combate para enfrentarnos a la invasión cuando esta suceda, y deberemos ser capaces de movilizar nuestra flota a cualquier planeta del sistema planetario. Para esto será necesario determinar la ruta más rápida para llegar a cualquier planeta desde el planeta en el que se encuentre la base de la flota.

## Parte 2:

### Especificaciones y limitaciones de las tecnologías:

#### T1. Mapa del sistema planetario:



Hay que tener en cuenta que:

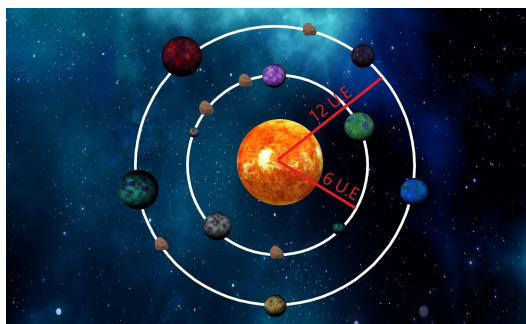
- Las órbitas de los planetas son circulares.
- Los planetas adyacentes pertenecientes a la misma órbita se encuentran a la misma distancia física.
- La posición relativa de los planetas será siempre la misma.

T2. Naves para el viaje espacial. La velocidad al viajar por una órbita es 10 veces superior que cuando se viaja entre órbitas. Además por cuestiones de control las naves deberán detenerse siempre en cualquier planeta por el cual pasen. La forma más rápida de ir de un planeta a otro es, en caso de que quieras viajar a una órbita inferior, viajar en línea recta hasta la órbita adyacente y luego recorrer la órbita hasta llegar al planeta destino. Y, en caso de que quieras viajar a una órbita superior, hacer el recorrido contrario, es decir recorrer la órbita hasta poder viajar en línea recta hasta el planeta destino.

T3. Nave centinela: Deberá recorrer todas las rutas espaciales de forma óptima.

T4. Nave mercante: Deberá recorrer todos los planetas del sistema de forma óptima.

T5. Mapa de campos de asteroides y distancias espaciales:



- Cada campo de asteroides incrementa en un 100% el tiempo que se tarda en viajar entre dos planetas.
- La distancia entre los planetas se puede calcular utilizando la fórmula del perímetro del círculo y dividiendo entre el número de planetas. Considerando  $\pi=3.14$ .
- Para simplificar se asumirá que al viajar desde un planeta a una órbita adyacente en línea recta se llegará justo al centro del arco que separa los dos planetas.

T6. Naves de combate: Su velocidad es de 1 U.E por hora y cuando se desplazan por una órbita planetaria su velocidad aumenta y es de 10 U.E. Además deberán utilizar las rutas espaciales ya establecidas. El tiempo que tardará una nave en viajar de un planeta a otro que esté situado en su misma órbita se puede calcular, siendo N el número de asteroides encontrados en el camino, con la siguiente fórmula:

$$\frac{D}{V \times 10} \times (1 + N)$$

En caso de viajar a planetas de diferentes órbitas,

$$\left( \frac{DO}{V} + \frac{DR}{V \times 10} \right) \times (1 + N)$$

D=Distancia entre dos planetas.

V= Velocidad de las naves.

DO=Distancia en línea recta hasta la órbita.

DR=Distancia restante, se obtiene dividiendo entre dos la distancia entre dos planetas.

**Nota:** Cada sesión de trabajo equivaldrá a un año en la vida de nuestros científicos.

A continuación se presenta la relación de los problemas que se propone al alumnado y los conceptos relacionados que tendrán que aplicar para resolverlos:

Sesión	Etapas del proyecto	Contenido
Sesión 1	1. Colonizar el sistema planetario y establecer rutas de viaje espacial.	Describir un problema utilizando grafos.
Sesión 2	2. Establecer algún tipo de vigilancia.	Grafos eulerianos.

Sesión 3	<p>3.</p> <p>a. Establecer una ruta óptima para el reparto de alimentos.</p> <p>b. Determinar el planeta en el que se establecerá la base de la flota de guerra. Además del tiempo que tardará la flota al viajar entre planetas.</p>	<p>Grafos hamiltonianos.</p> <p>Grafos ponderados.</p>
Sesión 4	<p>4. Ser capaces de calcular el tiempo que tardará la flota en llegar desde la base a cualquier otro planeta del sistema planetario.</p>	<p>Algoritmo de Dijkstra.</p>

## 5. Actividades.

### 5.1 Temporalización de las actividades.

La temporalización de la unidad y cómo se organizan las sesiones se detalla en la siguiente tabla donde se especifican las actividades a realizar y la duración de las mismas.

Sesión	Actividades	Duración
1	<b>Actividad 1</b> , introducción y presentación del proyecto.	10 minutos.
	<b>Actividad 2</b> , exposición: Introducción a grafos.	20 minutos.
	<b>Actividad 3</b> , fase 1 del proyecto: Conceptualización del problema.	20 minutos.
2	<b>Actividad 4</b> , Exposición: Grafos eulerianos y algoritmo de Hierholzer.	20 minutos.
	<b>Actividad 5</b> , fase 2 del proyecto: Aplicación del algoritmo de Hierholzer.	30 minutos.
3	<b>Actividad 6</b> , Exposición: Ciclos hamiltonianos, problema del comerciante y grafos ponderados.	20 minutos.
	<b>Actividad 7</b> , fase 3 del proyecto, Extracción de un ciclo hamiltoniano y añadir peso a las aristas.	30 minutos.

4		
	<b>Actividad 8</b> , Exposición: Algoritmo de Dijkstra para la obtención del camino más corto.	20 minutos.
	<b>Actividad 9</b> , fase 4 del proyecto, Aplicación del algoritmo de Dijkstra.	25 minutos.

## 5.2 Desarrollo de las actividades.

### Sesión 1

Actividad 1
Objetivos específicos
<ul style="list-style-type: none"> <li>Motivar al alumnado en el estudio de la matemática</li> </ul>
Competencias básicas
CCL, CAA, SIE, CSC
Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> <li>Enunciado del proyecto</li> </ul>
Temporalización
10 minutos.
Desarrollo de la actividad
<p>El alumnado leerá el enunciado del proyecto.</p> <p>Los grupos elegirán democráticamente el nombre de su civilización.</p>
Recursos y materiales
<p>Proyector.</p> <p>Pizarra.</p>

Actividad 2
Objetivos específicos

- Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, como y cuando utilizarlos.
- Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
- Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.

#### Competencias básicas

CCL, CMCT, CD

#### Contenidos

- Historia, origen de la teoría de grafos.
- Tipos de grafos.
- Caminos y ciclos.

#### Temporalización

20 minutos.

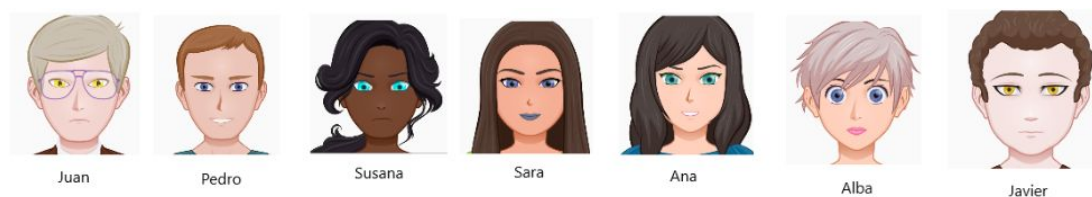
#### Desarrollo de la actividad

En esta actividad se introduce al alumnado el concepto de **grafo**. Para ello se les mostrará una serie de problemas sencillos extrapolables a su vida diaria que pueden ser modelados mediante grafos. Una vez afianzados dichos conceptos, se les explican los conceptos de **grafos dirigidos**, **caminos** y **ciclos** proporcionándoles diversos problemas realistas que les permita comprender mejor dichos conceptos.

#### Ejemplo 1.

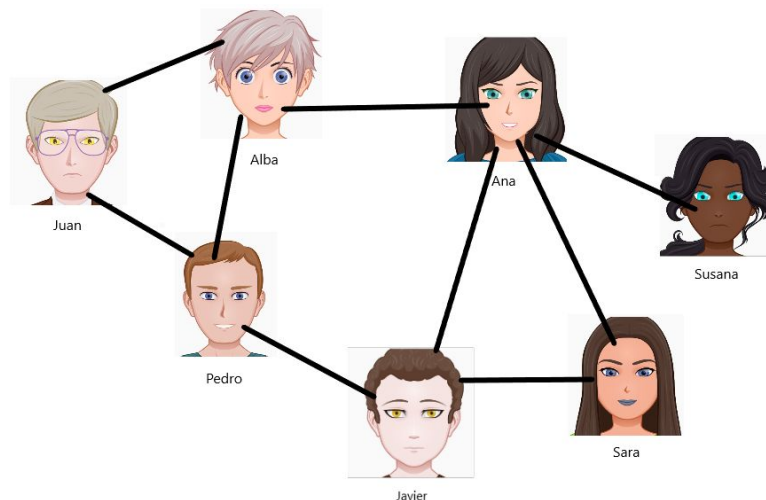
El siguiente ejemplo pretende servir como introducción al concepto de grafo mostrándoles como modelar un problema sencillo utilizando un grafo.

En una clase de 7 alumnos queremos representar las relaciones de amistad entre estos.



Alba, Pedro y Juan son amigos. Además Pedro es amigo de Javier y Alba de Ana. Javier a su vez también es amigo de Sara y de Ana. Ana es amiga de Susana y de Sara, pero Sara y Susana no son amigas entre ellas.

¿Cómo podríamos representar esta situación de forma gráfica y fácil de entender?

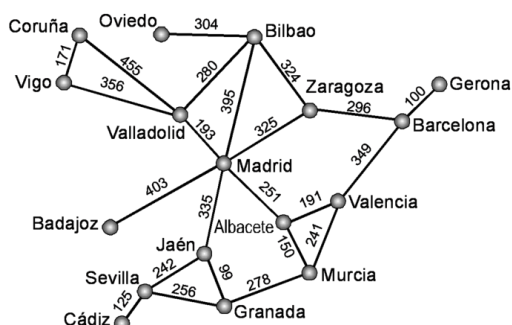


Mediante este grafo se puede observar de forma clara y sencilla las relaciones de amistad entre los alumnos.

### Ejemplo 2.

Con este ejemplo se pretende hacer ver al alumnado la diversidad de situaciones en las que se pueden utilizar los grafos.

Un mapa de España puede representarse mediante el grafo mostrado a continuación. Los vértices representan las ciudades y las aristas serán las carreteras que las conectan.



Img.01

### Ejemplo 3.

En este ejemplo se pretende mostrar al alumno la necesidad de introducir el concepto de grafo dirigido.

En el siguiente mapa de la ciudad de Castellón, una persona quiere dirigirse del punto A al punto B en coche.





Pues bien, cualquiera de las situaciones descritas arriba consiste en un camino desde Javier hasta Sara y lo escribiríamos mediante la sucesión de vértices:

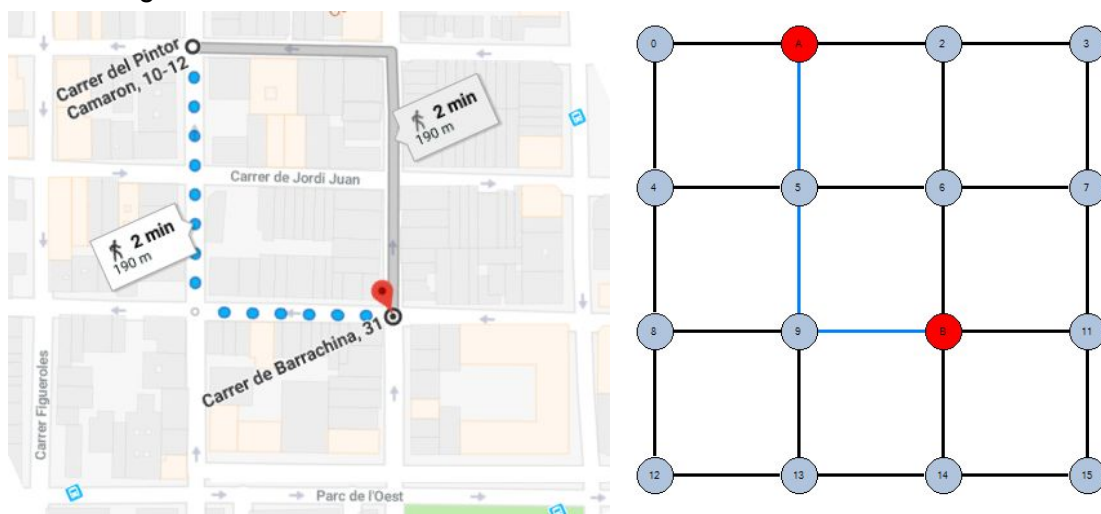
1. Juan, Alba, Ana, Sara
2. Juan, Pedro, Javier, Sara
3. Juan, Pedro, Javier, Ana, Sara

#### Ejemplo 5.

En este ejemplo se desea mostrar al alumnado una aplicación real del concepto de camino en un grafo.

Google Maps es una aplicación informática desarrollada por la compañía Google que tiene mucho que agradecer a la teoría de grafos. Esta aplicación puede servirnos para encontrar una ruta entre dos puntos deseados. Para calcular dichas rutas la aplicación utilizará internamente un grafo y, aplicando un algoritmo sobre este, nos devolverá la ruta deseada.

Volviendo al ejemplo del callejero de Castellón veamos cómo el algoritmo de Google Maps, calcula el camino para ir de A a B. Si le indicamos a la aplicación que se quiere ir andando, esta ignorará las direcciones de la calle, y calculará el camino a partir de un grafo no dirigido.

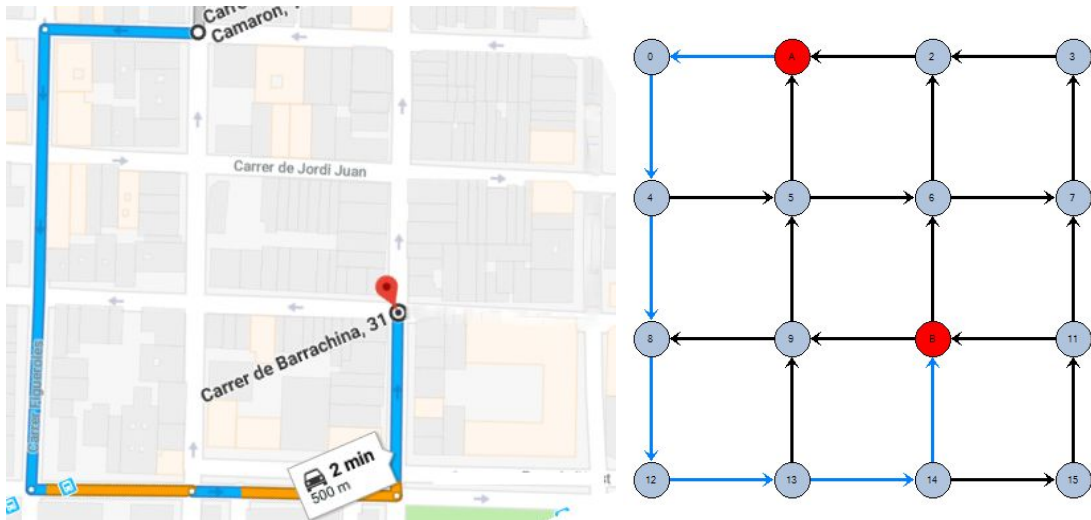


Como podemos observar nos ofrece dos caminos posibles.

Camino={A,5,9,B} o Camino={A,2,6,B}

Para que el alumnado asimile mejor las diferencias entre grafos dirigidos y no dirigidos a la hora de utilizar los caminos se les presenta ahora una situación distinta.

Si se desea ir de A a B en coche hay que tener en cuenta las normas de circulación y el sentido de las calles. Por lo tanto el grafo utilizado para calcular el camino será un grafo dirigido.



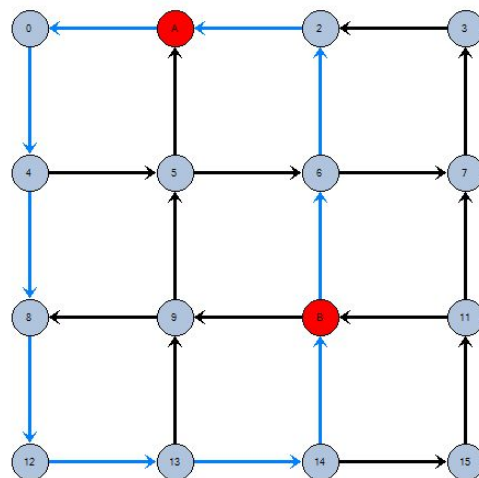
El camino obtenido en este caso es  $\{A, 0, 4, 8, 12, 13, 14, B\}$

### Ejemplo 6.

Para mostrar al alumnado el concepto de ciclo se va a utilizar el grafo visto en la actividad anterior pero con una situación diferente.

Un amigo está en nuestra casa que se encuentra en el punto A y queremos llevarle a su casa que se encuentra en el punto B y obviamente después de llevarle queremos volver a nuestra casa.

Se les enseña que el ejemplo descrito por el enunciado se puede representar mediante un ciclo donde el vértice de inicio y final es A. Además como vamos a ir en coche y se deben que respetar las señales de tráfico habrá que emplear un grafo dirigido:

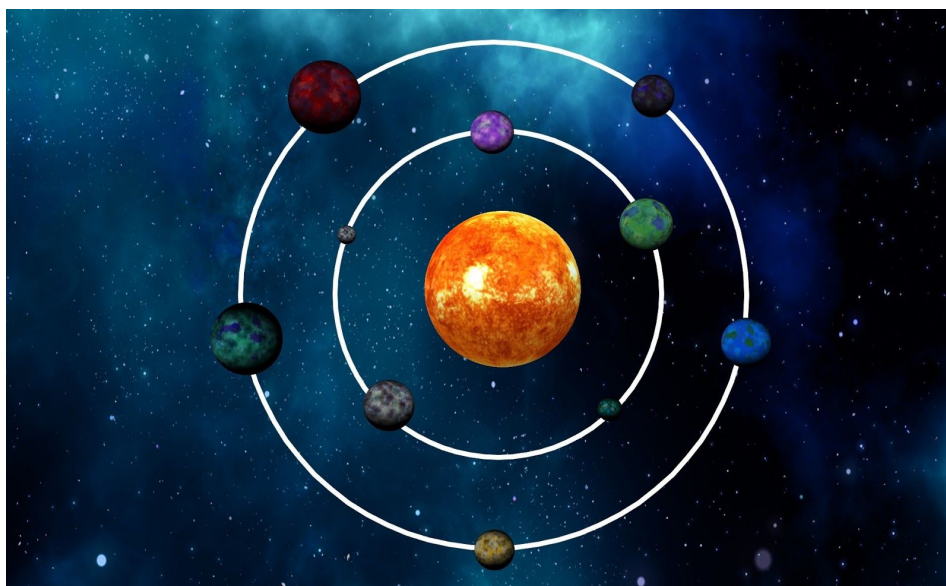


El ciclo obtenido en este caso es  $\{A, 0, 4, 8, 12, 13, 14, B, 6, 2, A\}$

### Recursos y materiales

Proyector.  
Pizarra.

Actividad 3
Objetivos específicos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.</li> <li>• Desarrollar el pensamiento matemático.</li> <li>• Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, cómo y cuando utilizarlos.</li> <li>• Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.</li> <li>• Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.</li> </ul>
Competencias básicas
CCL, CMCT, CAA, CSC, SIE
Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tipos de grafos.</li> <li>• Caminos y ciclos.</li> <li>• Enunciado del proyecto</li> </ul>
Temporalización
20 minutos.
Desarrollo de la actividad
<p>El alumnado se colocará en grupos para comenzar la primera fase del proyecto.</p> <p>En esta actividad se deben resolver las siguientes cuestiones:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. “Colonizar el sistema planetario y establecer rutas de viaje espacial”.</li> </ol> <p>Para ello serán necesarias las siguientes tecnologías:</p> <p>T1. Mapa del sistema planetario.</p> <p>T2. Naves para el viaje espacial.</p> <p>Se pretende que los grupos representen mediante un grafo el siguiente mapa planetario:</p>

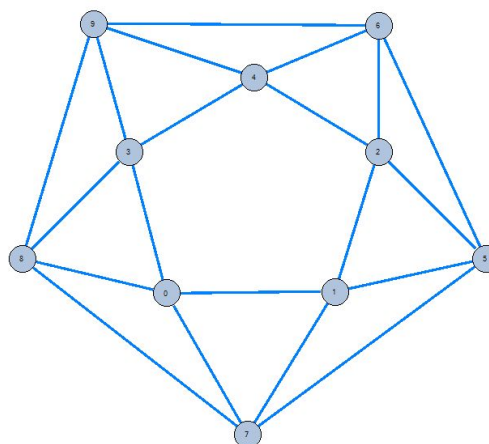
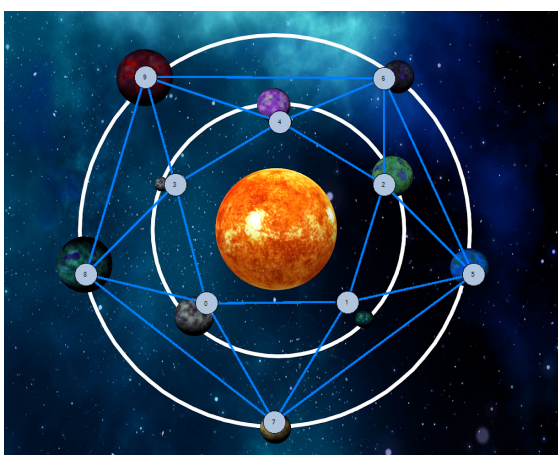


Todos los grupos de alumnos recibirán una imagen impresa del mapa.

En primer lugar cada grupo elegirá arbitrariamente un planeta de origen. Posteriormente y a partir de lo aprendido en clase deberán describir el sistema planetario y sus rutas espaciales usando un grafo. Para ello deberán realizar los siguientes pasos:

1. Identificar los vértices o nodos y las aristas del grafo.
2. Asignar un nombre o un número a cada vértice.
3. Conectar las aristas siguiendo las especificaciones.

El resultado esperado por parte del alumnado será la elaboración de un grafo para modelar el sistema planetario. En este grafo los vértices representarán los planetas y las aristas las rutas espaciales. El grafo obtenido teniendo en cuenta las especificaciones del proyecto es el siguiente:



#### Recursos y materiales

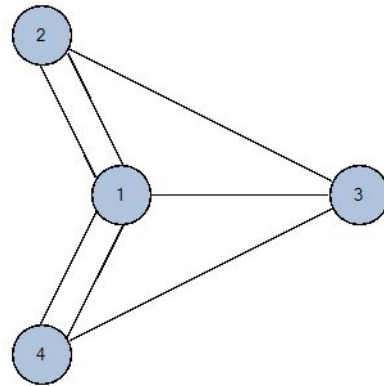
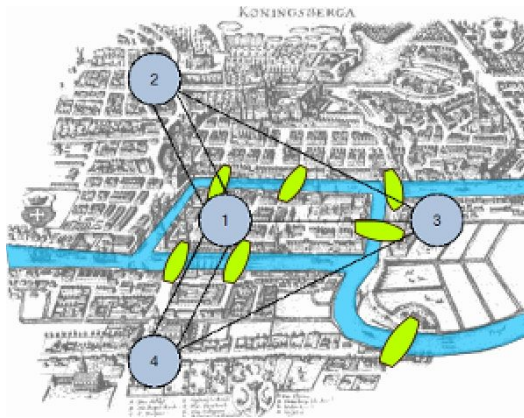
Dossier de trabajo.  
Mapa del sistema planetario

Material de dibujo.
---------------------

## Sesión 2

Actividad 4
Objetivos específicos
<ul style="list-style-type: none"><li>• Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.</li><li>• Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, como y cuando utilizarlos.</li><li>• Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.</li><li>• Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.</li><li>• Estudiar algunas de las aplicaciones de los grafos.</li><li>• Ser capaces de utilizar los diferentes algoritmos presentados para realizar operaciones con grafos.</li></ul>
Competencias básicas
CCL, CMCT, CEC
Contenidos
<ul style="list-style-type: none"><li>• Historia, origen de la teoría de grafos.</li><li>• Grafos Eulerianos y algoritmo de Hierholzer.</li></ul>
Temporalización
20 minutos
Desarrollo de la actividad
En esta actividad se expondrá de forma teórica la historia de los puentes de Königsberg como introducción histórica a la teoría de grafos. Posteriormente se observará la modelización del problema y la solución planteada por <b>Euler</b> .





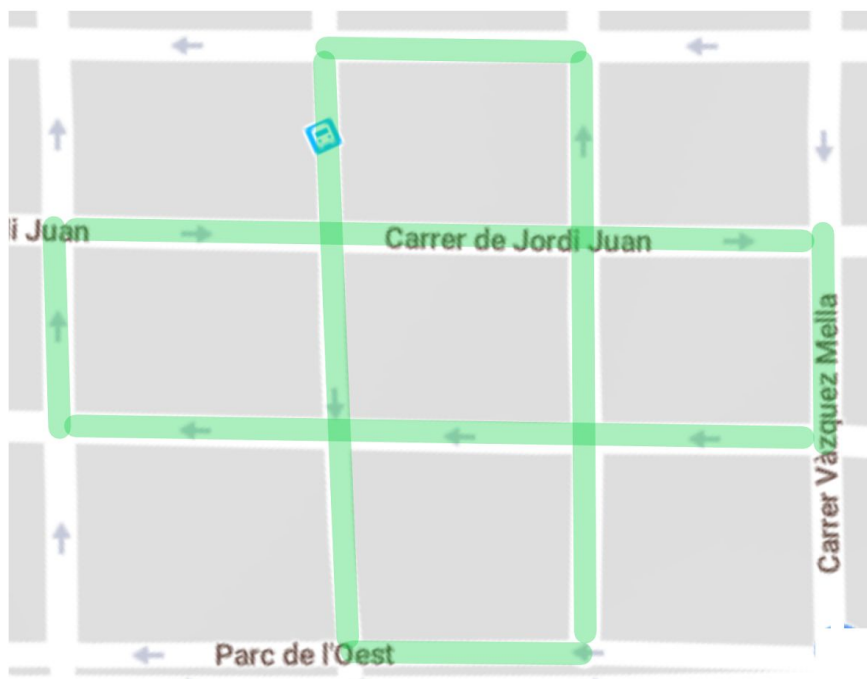
Solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg

Esta historia nos servirá como nexo de unión entre los grafos vistos en la sesión previa y los ciclos eulerianos que son el objetivo principal de esta sesión. Una vez asimilados dichos conceptos se explicará de forma teórica el algoritmo de **Hierholzer**.

#### Ejemplo 1.

En este ejemplo se le muestra al alumno una situación cotidiana que ha de resolverse aplicando el algoritmo previamente estudiado.

A un cartero de Castellón le han asignado las siguientes calles o tramos de ellas para repartir cartas:

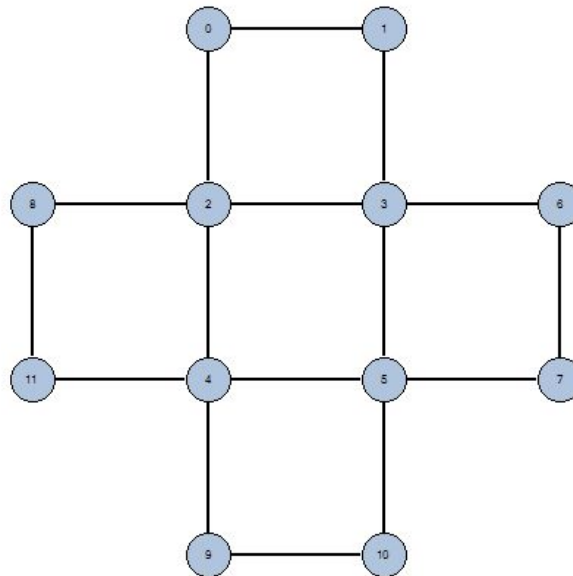


Se debe determinar cuál será el recorrido óptimo para que el cartero tenga que andar lo mínimo posible.

En primer lugar se realizará es una representación del problema mediante un grafo.

El cartero va andando, así que no se tendrán en cuenta las direcciones de las calles. Por lo tanto se tratará de un grafo no dirigido.

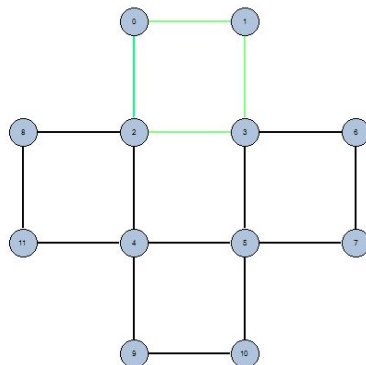
Se elegirán como vértices los cruces entre las calles y como aristas las propias calles. Se obtendrá como resultado el siguiente grafo:



Al tener que recorrer todas las calles no se tendrá en cuenta el orden, pues la distancia a recorrer será la misma siempre y cuando se pase solo una vez por cada calle. De modo que el objetivo será obtener un ciclo euleriano para este grafo. Para ello se aplicará el algoritmo de **Hierholzer**.

A continuación se presenta al alumnado la resolución paso a paso del problema.

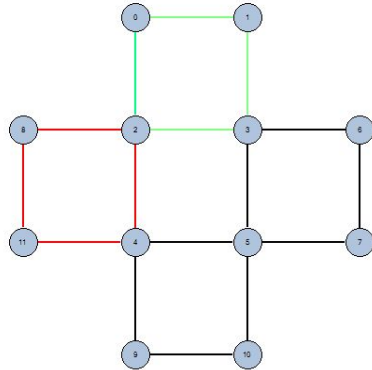
1. Verificar que el grafo es conexo y todos sus vértices tienen grado par.
  - a. Se verifica
2. Elegir un vértice al azar, trazar un ciclo **C** y marcar las aristas del ciclo como visitadas.
  - a. Elegimos el nodo 0 como nodo de inicio.
  - b. Dibujamos un ciclo sencillo.



- c.
- d.  $C = \{0, 1, 3, 2, 0\}$ .



3. Elegir cualquier vértice **V** de **C** que tenga aristas conectadas sin visitar, trazar un ciclo **C2** que no recorra ninguna arista ya visitada y marcar las nuevas aristas como visitadas.
  - a. Podemos elegir como **V** el nodo 2 o 3. Elegimos por ejemplo el 2.
  - b. Trazamos otro ciclo desde 2.

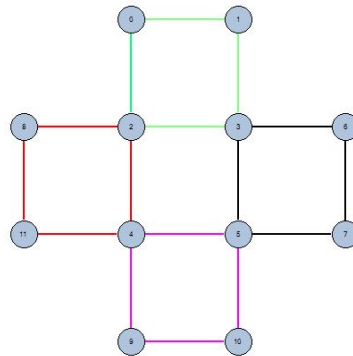


- c.
- d. **C2**={2,8,11,4,2}
4. Sustituir en **C** el vértice **V** por **C2**.
  - a. **C**={0,1,3,2,0}, **V**={2}, **C2**={2,8,11,4,2}, nuevo **C**={0,1,3,2,8,11,4,2,0}.
5. Repetir desde 3 hasta que no queden aristas sin visitar.

Completamos el algoritmo:

**V**={4}.

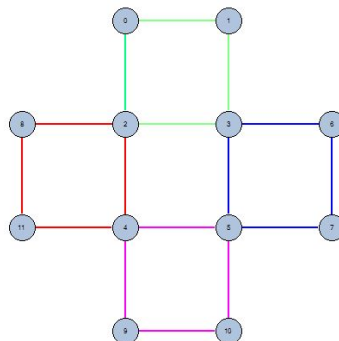
**C2**={4,9,10,5,4}.



**C**={0,1,3,2,8,11,4,9,10,5,4,2,0}.

**V**={5}.

**C2**={5,7,6,3,5}.



$C=\{0,1,3,2,8,11,4,9,10,5,7,6,3,5,4,2,0\}$ .

El recorrido que tendrá que hacer el cartero es **C**.

#### Recursos y materiales

Proyector.  
Pizarra.

#### Actividad 5

##### Objetivos específicos

- Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.
- Desarrollar el pensamiento matemático.
- Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, cómo y cuando utilizarlos.
- Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
- Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.
- Ser capaces de utilizar los diferentes algoritmos presentados para realizar operaciones con grafos.

##### Competencias básicas

CCL, CMCT, CAA, CSC, SIE

##### Contenidos

- Caminos y ciclos.
- Grafos eulerianos y algoritmo de Hierholzer.
- Enunciado del proyecto

##### Temporalización

30 minutos.

##### Desarrollo de la actividad

El alumnado se colocará en grupos para comenzar la segunda fase del proyecto. Esta fase consiste en aplicar el algoritmo de Hierholzer para obtener un ciclo euleriano a partir del grafo que se obtuvo en la primera fase del proyecto.

En esta actividad se deben resolver las siguientes cuestiones:

2. “Establecer algún tipo de vigilancia en los planetas y en las rutas espaciales para evitar que pueda descubrirse la actual situación.”

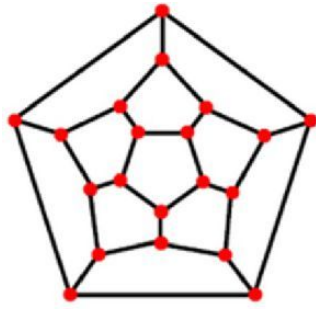
Tecnología utilizada:

T3. Nave centinela.

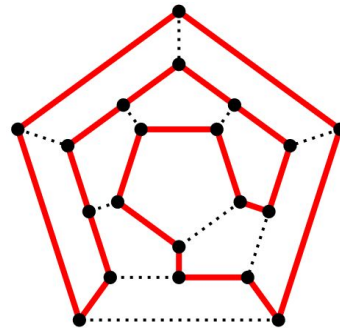


### Sesión 3

Actividad 6
Objetivos específicos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.</li> <li>• Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.</li> <li>• Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.</li> <li>• Estudiar algunas de las aplicaciones de los grafos.</li> </ul>
Competencias básicas
CCL, CMCT
Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ciclos hamiltonianos.</li> <li>• Grafos ponderados.</li> </ul>
Temporalización
20 minutos.
Desarrollo de la actividad
<p>En esta actividad se introducirán de forma teórica los conceptos de caminos y ciclos hamiltonianos así como grafos ponderados. A continuación se les plantean diversos ejercicios, algunos de ellos relacionados con grafos ya vistos en las sesiones previas, que servirán para lograr una mayor asimilación de los conceptos.</p> <p>El primer ejercicio que se propone al alumnado consiste en encontrar una ruta posible en el juego de Hamilton.</p> <p>El juego de hamilton consiste en un mapa en forma de icosaedro que contiene 20 ciudades. La misión es salir de una determinada ciudad y encontrar una ruta que recorra todas y cada una de las ciudades una única vez y permita volver a la ciudad de origen.</p>



img.02

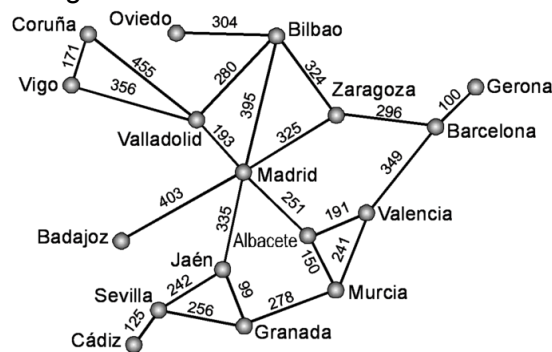


img.03

### Ejemplo 1.

En este ejemplo se pretende introducir al alumnado el concepto de grafos ponderados con un grafo ya conocido.

En uno de los primeros ejemplos que se vieron en las sesiones anteriores ya se observó un grafo ponderado, pero aún no se tenían los conocimientos necesarios para entenderlo. El grafo en cuestión era el siguiente:



En este grafo los kilómetros que separan las ciudades están representados mediante un número junto a la arista. Este número es el peso de la arista. A este tipo de grafos se les conoce como grafos ponderados

### Ejemplo 2.

En el siguiente ejemplo se quiere mostrar al alumnado la utilidad que nos proporcionan los grafos ponderados.

Si se quiere ir de Granada a Barcelona uno de los posibles caminos a seguir sería el siguiente:

(Granada, Murcia, Valencia, Barcelona)



Si se suma el peso de cada arista recorrida en el camino se puede obtener el peso total del camino, que en este caso será  $278+241+349=868$ .

Tal y como se vio en la clase en la que estudiamos los caminos y como se puede observar este no es el único camino posible para ir desde Granada a Barcelona. Hay muchos caminos más, por ejemplo:



(Granada,Albacete,Madrid,Zaragoza,Barcelona)

Con un peso total de  $99+335+325+296=1055$ .

## Recursos y materiales

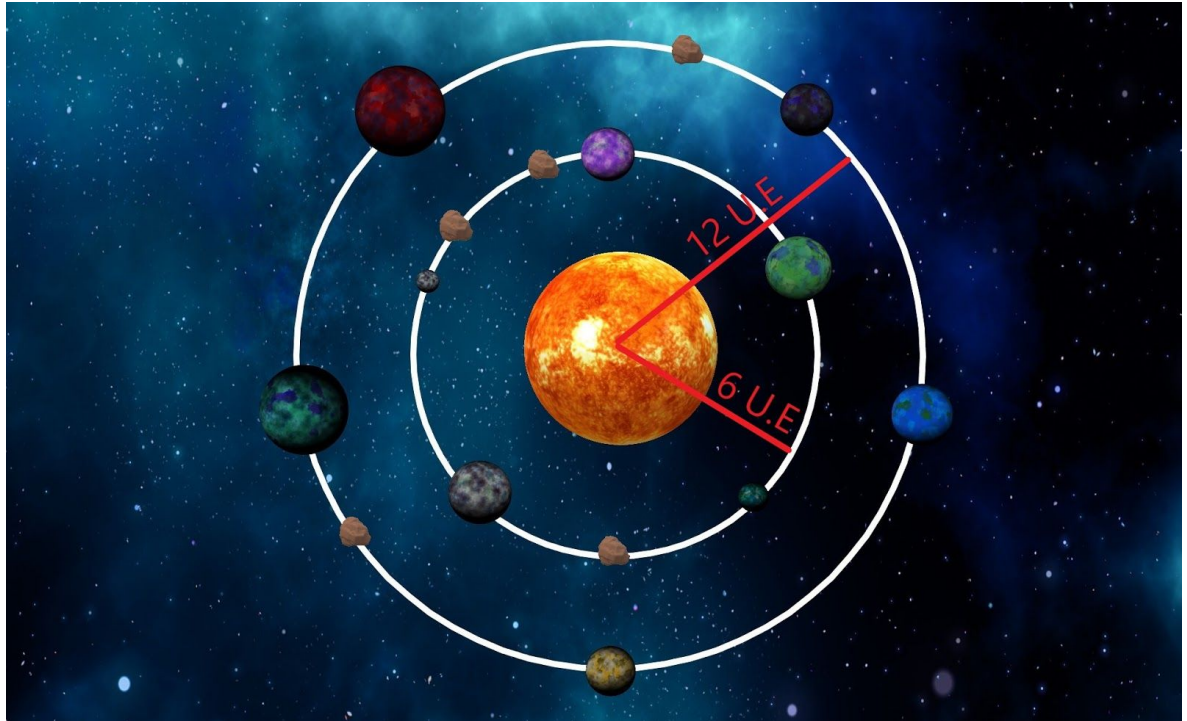
Proyector.  
Pizarra.

## Actividad 7

### Objetivos específicos

- Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.
- Desarrollar el pensamiento matemático.
- Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, cómo y cuando utilizarlos.
- Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
- Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.

Competencias básicas
CCL, CMCT, CAA, CSC, SIE
Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caminos y ciclos.</li> <li>• Ciclos hamiltonianos.</li> <li>• Grafos ponderados.</li> <li>• Enunciado del proyecto.</li> </ul>
Temporalización
30 minutos.
Desarrollo de la actividad
<p>El alumnado se colocará en grupos para comenzar la tercera fase del proyecto.</p> <p>En esta actividad se deben resolver las siguientes cuestiones:</p> <p>3.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Los planetas colonizados tendrán suficientes alimentos para sobrevivir al menos durante dos años, pero a partir de ese momento deberán abastecerse del planeta origen. Por lo tanto habrá que establecer una ruta óptima para el reparto de alimentos.</li> <li>Deberá determinarse el planeta en el que se establecerá la base de la flota de guerra. Además del tiempo que tardará la flota al viajar entre planetas.</li> </ol> <p>Tecnología utilizada:</p> <p>T4. Nave mercante.</p> <p>T5. Mapa de campos de asteroides y distancias espaciales.</p> <p>T7. Naves de guerra.</p> <p>En primer lugar a partir de lo aprendido en clase se deberá:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Obtener un ciclo hamiltoniano a partir el grafo que se obtuvo en la primera fase del proyecto.</li> <li>2. Cada grupo elegirá arbitrariamente un planeta donde colocar la base de la flota y posteriormente se calcularán los pesos de las aristas utilizando el mapa de campos de asteroides y distancias espaciales.</li> </ol>



Se entregará una impresión de este mapa a cada grupo de alumnos.

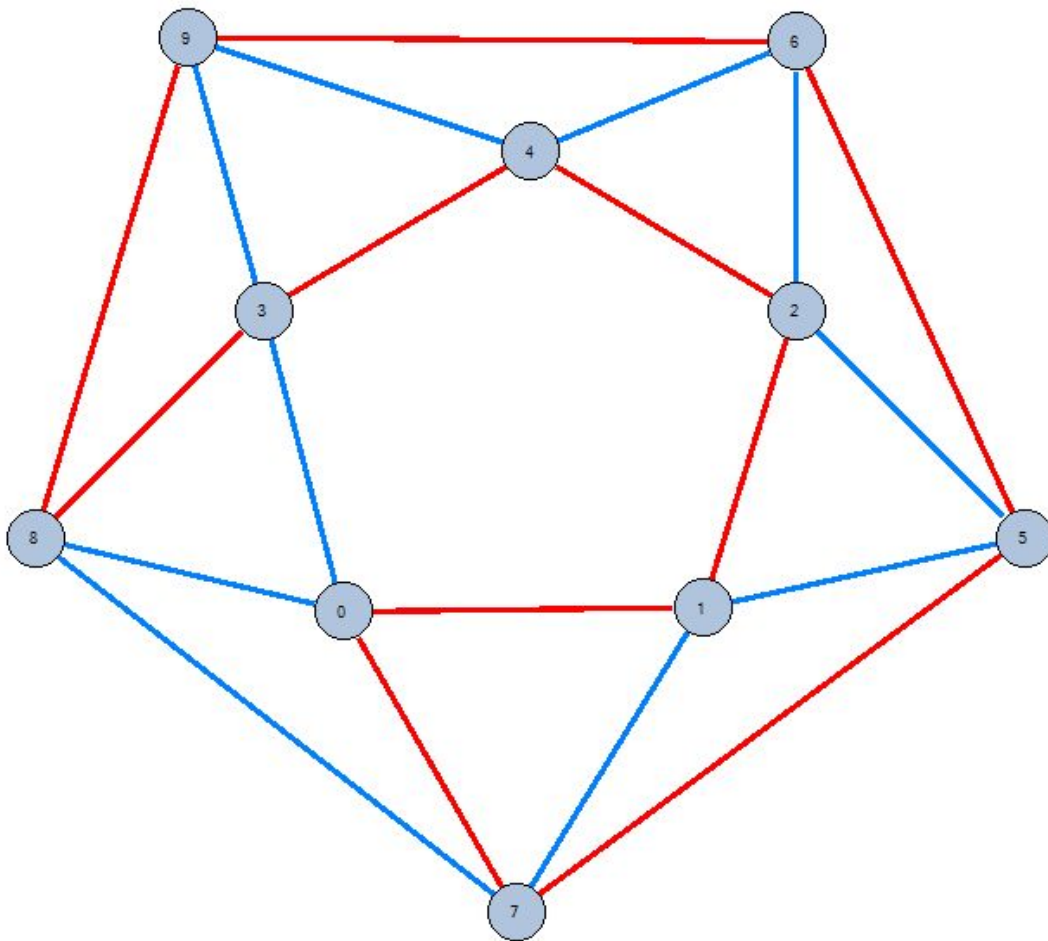
En la imagen los campos de asteroides están representados mediante una figura con forma de asteroide.

En esta actividad se pretende que el alumnado obtenga la ruta óptima que debe recorrer la nave mercante. Además se pretende que el alumno sea capaz de ponderar un grafo a partir de la interpretación de los datos y de las especificaciones técnicas indicadas en el proyecto.

En la primera cuestión para llegar a una posible solución hay que obtener un ciclo hamiltoniano en el grafo. Por ejemplo si se tomara como planeta de origen el número 3, una ruta posible sería la siguiente:

{3, 8, 9, 6, 5, 7, 0, 1, 2, 4, 3}





Para obtener el tiempo que tardará la flota en viajar por las rutas espaciales primero se deberá obtener la distancia que separa los planetas, que se puede obtener a partir de la fórmula del perímetro de la circunferencia:

Distancia entre dos planetas situados en la órbita exterior:

$$\frac{3.14 \times 12 \times 2}{5} \approx 15 \text{ U.E}$$

Distancia entre dos planetas situados en la órbita interior

$$\frac{3.14 \times 6 \times 2}{5} \approx 7.5 \text{ U.E}$$

La velocidad de las naves es de 1 U.E por hora y cuando se desplazan por una órbita planetaria su velocidad aumenta y es de 10 U.E. El tiempo que tardará una nave en viajar de un planeta a otro que esté situado en su misma órbita se puede calcular, siendo N el número de asteroides encontrados en el camino, con la siguiente fórmula:

$$\frac{D}{V \times 10} \times (1 + N)$$

En caso de viajar entre planetas situados en diferentes órbitas,

$$\left( \frac{DO}{V} + \frac{DR}{V \times 10} \right) \times (1 + N)$$

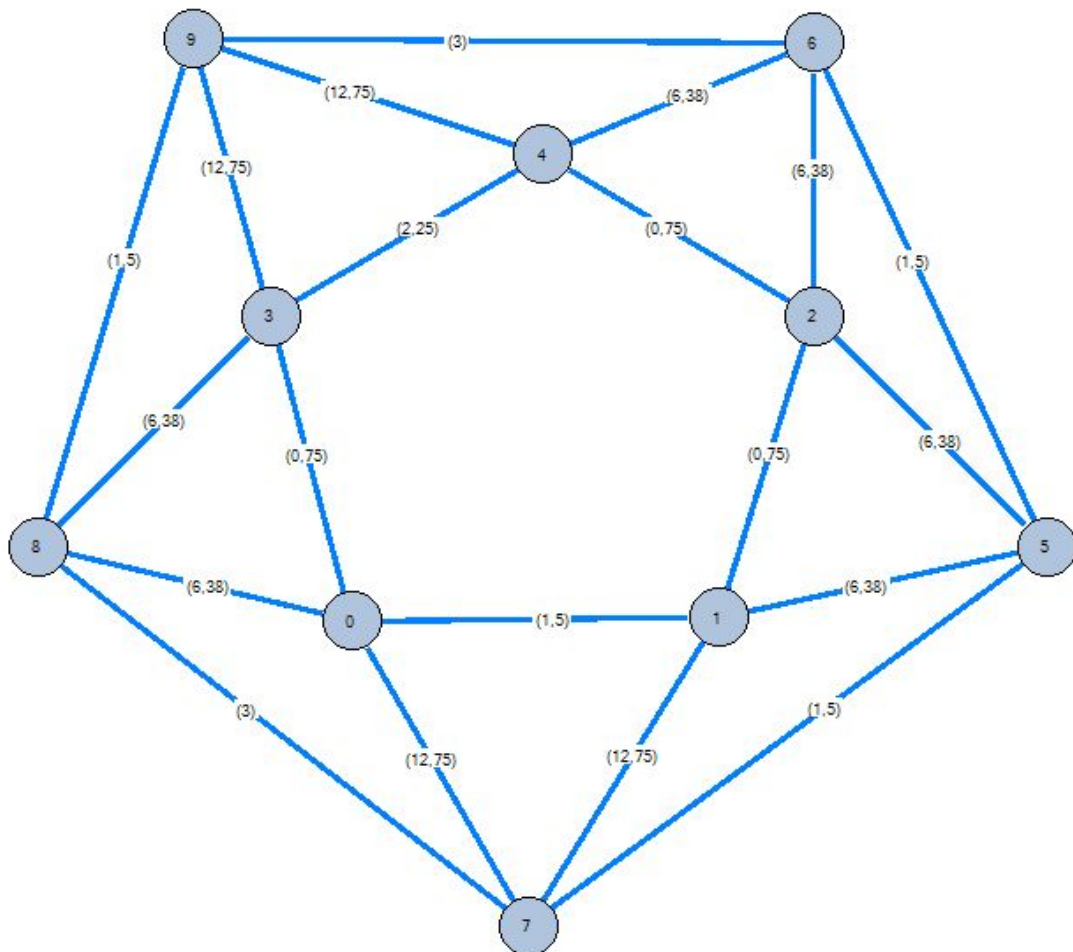
D=Distancia entre dos planetas.

V= Velocidad de las naves.

DO=Distancia en línea recta hasta la órbita.

DR=Distancia restante, se obtiene dividiendo entre dos la distancia entre dos planetas.

A continuación se muestra el grafo ponderado donde los pesos de las aristas representan el tiempo, en horas, que tardará la flota en recorrer cada ruta espacial entre cada par de planetas:



Material de dibujo.  
Calculadora.  
Dossier de trabajo.

#### Sesión 4

##### Actividad 8

##### Objetivos específicos

- Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.
- Desarrollar el pensamiento matemático.
- Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, como y cuando utilizarlos.
- Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
- Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.
- Estudiar algunas de las aplicaciones de los grafos.
- Ser capaces de utilizar los diferentes algoritmos presentados para realizar operaciones con grafos.

##### Competencias básicas

CCL, CMCT, CAA, CD

##### Contenidos

- Algoritmo de Dijkstra.

##### Temporalización

20 minutos.

##### Desarrollo de la actividad

En esta actividad se presenta el algoritmo de Dijkstra para el cálculo del camino más corto en un grafo ponderado. Se presentará este algoritmo de forma teórica y posteriormente se expondrá un problema basado en un videojuego. Con este ejercicio se pretende motivar al alumno y que este aprenda de forma novedosa. Dado que se trata de la actividad final esta se utilizará para repasar los conceptos previos expuestos en la unidad. Primero se modelizará el problema mediante un grafo, después se ponderará dicho grafo y finalmente se resolverá utilizando el algoritmo de Dijkstra paso a paso.

##### Ejemplo 1.

En el siguiente ejemplo se presenta una aplicación del algoritmo de Dijkstra. Para llamar la atención del alumnado y estimular el proceso de aprendizaje se pretende modelizar la siguiente situación utilizando el videojuego Starcraft 2.

En este videojuego las unidades terrestres deben recorrer el mapa para recoger recursos, construir estructuras y como objetivo final eliminar al enemigo. Cada vez que se hace click con el ratón sobre un punto en el mapa el ordenador realizará el cálculo automático del camino óptimo para llegar hasta ese punto.

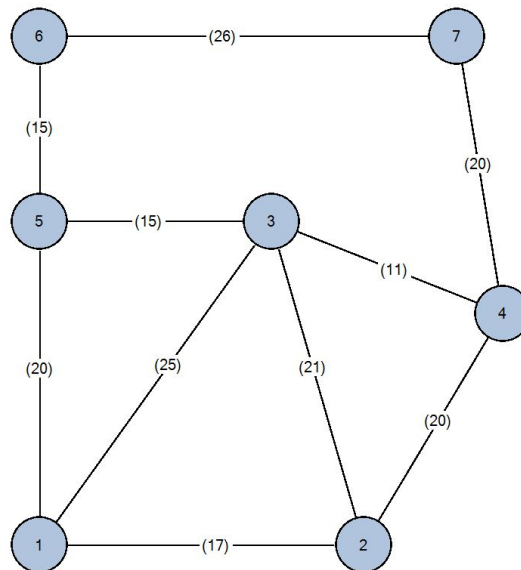
Un marine espacial, situado en el punto A, debe llegar al punto B en el menor tiempo posible para eliminar el huevo antes de que eclosione y libere a la criatura que contiene en su interior.



En el momento en el que se ordene al marine espacial dirigirse a destruir el huevo, se realizará un cálculo para indicarle cuál es el camino que debe recorrer. Para representar cómo se realizará este cálculo se dibujará un grafo que represente el mapa. En cada punto de intersección dibujaremos un nodo y en cada camino que los conecta una arista.



A continuación se ponderará el nodo donde el peso de cada arista representa la distancia que separa cada par de nodos.

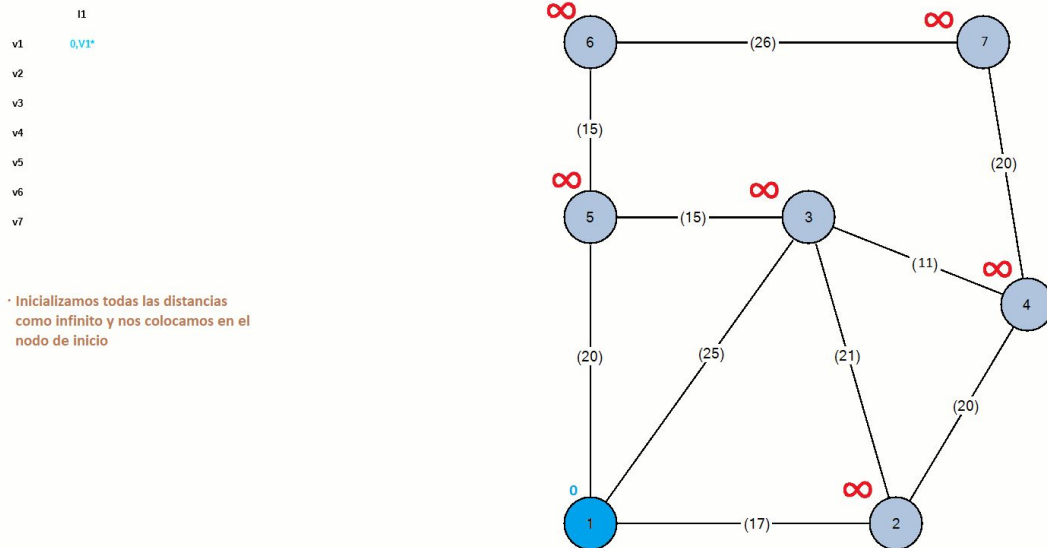


A continuación se le presenta al alumnado el algoritmo de Dijkstra aplicado paso a paso a este problema para el cálculo de la ruta más corta.

1. Se inicializa a infinito todas las distancias desde el vértice de inicio.
2. Se marca el vértice de inicio y se apunta la distancia acumulada hasta ese punto.
3. Se recorren las aristas adyacentes y apuntamos la distancia acumulada hasta cada nodo junto con el nodo de origen. En caso de que se haya llegado a ese vértice por otro camino se apunta la menor de las distancias.

4. Se elige el par {Distancia, Vértice} de menor distancia como nuevo vértice de inicio.
5. Se repite el algoritmo desde el punto 3 hasta que no quede ningún nodo por marcar.

En este gif se puede observar cómo resolver el algoritmo paso a paso:



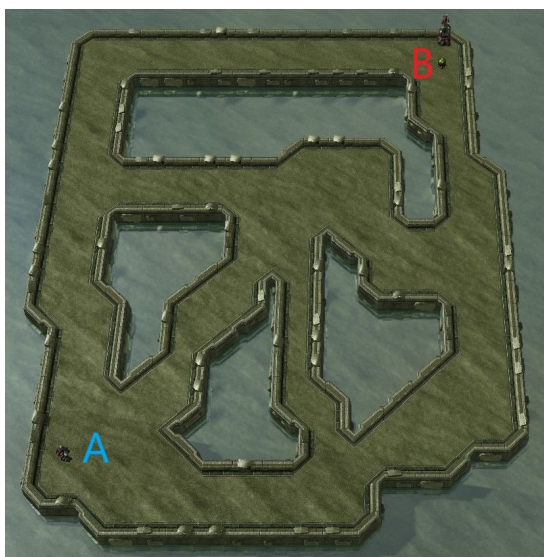
[https://drive.google.com/open?id=1ffXPIEFirQTqOCYujN1D7\\_wkjWZNJIJe](https://drive.google.com/open?id=1ffXPIEFirQTqOCYujN1D7_wkjWZNJIJe)

	I1	I2	I3	I4	I5	I6
v1	0,V1*	*	*	*	*	*
v2	17,V1	17,V1*	*	*	*	*
v3	25,V1	25,V1	25,V1	25,V1*	*	*
v4	∞	37,V2	37,V2	36,V3	36,V3	36,V3*
v5	20,V1	20,V1	20,V1*	*	*	*
v6	∞	∞	35,V5	35,V5	35,V5*	*
v7	∞	∞	∞	∞	61,V6	56,V4

Tabla de resultados tras aplicar el algoritmo de Dijkstra.

Finalmente se observa a modo de confirmación si la ruta calculada para el marine espacial y la ruta obtenida por el ordenador es la misma:





Click en la imagen para ver el resultado.

Efectivamente, como se puede comprobar, el marine espacial realiza el mismo recorrido que se ha calculado utilizando el algoritmo de Dijkstra {V1, V2, V4, V7}.

#### Recursos y materiales

Proyector.  
Pizarra.

#### Actividad 9

##### Objetivos específicos

- Motivar al alumnado en el estudio de la matemática.
- Desarrollar el pensamiento matemático.
- Conocer e identificar los diferentes tipos de grafos, como y cuando utilizarlos.
- Aprender a extraer adecuadamente información de un grafo.
- Ser capaces de representar, mediante grafos, la información obtenida de problemas sencillos.
- Ser capaces de utilizar los diferentes algoritmos presentados para realizar operaciones con grafos.

##### Competencias básicas

CCL, CMCT, CAA, CSC, SIE

##### Contenidos

- Algoritmo de Dijkstra.
- Enunciado del proyecto.

Temporalización																																																																																																																																															
30 minutos.																																																																																																																																															
Desarrollo de la actividad																																																																																																																																															
<p>El alumnado se colocará en grupos para comenzar la cuarta y última fase del proyecto.</p> <p>En esta actividad se deben resolver las siguientes cuestiones:</p> <p>4. “Serán necesarias naves de combate para enfrentarnos a la invasión cuando esta suceda, y deberemos ser capaces de movilizar nuestra flota a cualquier planeta del sistema planetario. Para esto será necesario determinar la ruta más rápida para llegar a cualquier planeta desde el planeta en el que se encuentre la base de la flota.”</p> <p>Tecnología utilizada:</p> <p>T7. Naves de combate.</p> <p>Esta fase consiste en aplicar el algoritmo de Dijkstra para obtener el camino más rápido hasta todos los vértices del grafo desde el vértice que se decida como vértice inicial. Este vértice inicial se corresponde con el planeta en el que se ha colocado la base de la flota.</p> <p>Mediante el algoritmo de Dijkstra se han obtenido las rutas más rápidas hacia todos los planetas desde el planeta 7.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>I1</th><th>I2</th><th>I3</th><th>I4</th><th>I5</th><th>I6</th><th>I7</th><th>I8</th><th>I9</th><th>I10</th><th>I11</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>v0</td><td>12.75, V7</td><td>12.75, V7</td><td>12.75, V7</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v1</td><td>12.75, V7</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v2</td><td>∞</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5</td><td>7.88, V5*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v3</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8</td><td>9.38, V8*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v4</td><td>∞</td><td>∞</td><td>9.38, V6</td><td>9.38, V6</td><td>9.38, V6</td><td>9.38, V6</td><td>8.63, V2</td><td>8.63, V2*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v5</td><td>1.5, V7</td><td>1.5, V7*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v6</td><td>∞</td><td>3, V5</td><td>3, V5*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v7</td><td>0, V7*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v8</td><td>3, V7</td><td>3, V7</td><td>3, V7</td><td>3, V7*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> <tr> <td>v9</td><td>∞</td><td>∞</td><td>6, V6</td><td>4.5, V8</td><td>4.5, V8*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td></tr> </tbody> </table> <p>Algoritmo de Dijkstra</p> <p>En esta tabla se puede observar el tiempo que tardará la flota de guerra en llegar a cada uno de los planetas desde la base. Los planetas a los que se tardará más tiempo en llegar serán el 0 y el 3, que necesitarán un tiempo de viaje de 9,38 horas.</p>													I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	v0	12.75, V7	12.75, V7	12.75, V7	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8*	*	v1	12.75, V7	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5*	*	*	*	*	*	v2	∞	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5*	*	*	*	*	v3	∞	∞	∞	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8*	*	*	v4	∞	∞	9.38, V6	9.38, V6	9.38, V6	9.38, V6	8.63, V2	8.63, V2*	*	*	*	v5	1.5, V7	1.5, V7*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	v6	∞	3, V5	3, V5*	*	*	*	*	*	*	*	*	v7	0, V7*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	v8	3, V7	3, V7	3, V7	3, V7*	*	*	*	*	*	*	*	v9	∞	∞	6, V6	4.5, V8	4.5, V8*	*	*	*	*	*	*
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11																																																																																																																																				
v0	12.75, V7	12.75, V7	12.75, V7	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8*	*																																																																																																																																				
v1	12.75, V7	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v2	∞	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5	7.88, V5*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v3	∞	∞	∞	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8	9.38, V8*	*	*																																																																																																																																				
v4	∞	∞	9.38, V6	9.38, V6	9.38, V6	9.38, V6	8.63, V2	8.63, V2*	*	*	*																																																																																																																																				
v5	1.5, V7	1.5, V7*	*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v6	∞	3, V5	3, V5*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v7	0, V7*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v8	3, V7	3, V7	3, V7	3, V7*	*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
v9	∞	∞	6, V6	4.5, V8	4.5, V8*	*	*	*	*	*	*																																																																																																																																				
Recursos y materiales																																																																																																																																															
Dossier de trabajo.																																																																																																																																															



## 6. Evaluación

El principal objeto de evaluación de la presente unidad didáctica es el proyecto desarrollado.

Para evaluar dicho proyecto los grupos deberán crear un dossier con la solución justificada a las cuestiones planteadas y entregarlo al final de la 4ª sesión. El contenido del dossier será el objeto principal de evaluación de la presente unidad didáctica.

El profesor valorará con una puntuación de 1 a 3 a cada alumno teniendo en cuenta tanto la correcta ejecución de los conceptos aplicados como la actitud frente a los demás compañeros de clase y hacia el profesor, la implicación en el grupo y el interés. El apartado actitud se evaluará a lo largo de las sesiones y el de conceptos una vez entregado el dossier.

### Rúbrica de evaluación

Item a puntuar	Puntuación		
	1	2	3
Participación 10%	No participa en clase.	Participa ocasionalmente en clase.	Participa activamente en clase.
Trabajo en equipo 10%	No colabora con sus compañeros.	Colabora de forma regular con sus compañeros	Trabaja en equipo
Comportamiento 10%	No muestra interés y tiene un mal comportamiento.	Muestra un interés y un comportamiento regular.	Muestra interés y se comporta correctamente.
Aplicación de conceptos 70%	No ha aplicado correctamente los conceptos.	Tiene claros los conceptos básicos pero necesita refuerzo.	Ha comprendido y aplicado correctamente los conceptos

Tabla de evaluación.

Parte del proyecto	Participación	Trabajo en equipo	Comportamiento	Aplicación de conceptos	Media
1					
2					
3					
4					
Total					

## 7. Referencias

- Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. Medical education, 20(6), 481-486.
- Ciclo euleriano. (Sin fecha). Wikipedia.  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Problema\\_de\\_los\\_puentes\\_de\\_K%C3%B6nigsberg](https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg)
- Combariza, G. (2003). Una introducción a la teoría de Grafos. Memorias XIV Encuentro de Geometría y II encuentro de Aritmética (pp. 565-591).
- Coriat, M. (1989). Nudos y nexos: redes en la escuela. Síntesis.
- González, B. M. G. (2003). Las Analogías en el proceso Enseñanza-Aprendizaje de las Ciencias de la Naturaleza. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 197-199.
- Sacristán, J. G. (1982). La pedagogía por objetivos: obsesión por la eficiencia. Ediciones Morata.
- Sánchez, J. (2013). Qué dicen los estudios sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos. Actualidad pedagógica.
- Tippelt, R. L. H. (2001): El Método de Proyectos.

## 8. Fuentes de imágenes

Los recursos visuales utilizados en los ejemplos han sido en su mayoría realizadas por el autor. En el caso de imágenes descargadas de internet, se han utilizado en su mayoría imágenes con licencia CC0 <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.es>.

Imágenes sin licencia CC0 o con licencia desconocida:

- img.01.  
<https://eapd2g6.wikispaces.com/file/view/carreteras.png/224585646/684x434/carreteras.png>
- img02.  
[http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/images/stories/publicaciones/medios/1436442878\\_487255\\_1436454483\\_sumario\\_normal.jpg](http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/images/stories/publicaciones/medios/1436442878_487255_1436454483_sumario_normal.jpg)
- img03.  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Hamiltonian\\_path.svg/250px-Hamiltonian\\_path.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Hamiltonian_path.svg/250px-Hamiltonian_path.svg.png)